دانشگاه صنعتی اصفهان

جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@JOZVE_IUT

باسمه تعالی

امتحان میان ترم اول فیزیک2- دانشگاه صنعتی اصفهان 20 اسفند ماه 1394- وقت 100دقیقه

سوال	1	2	3	4	جمع
نمره					

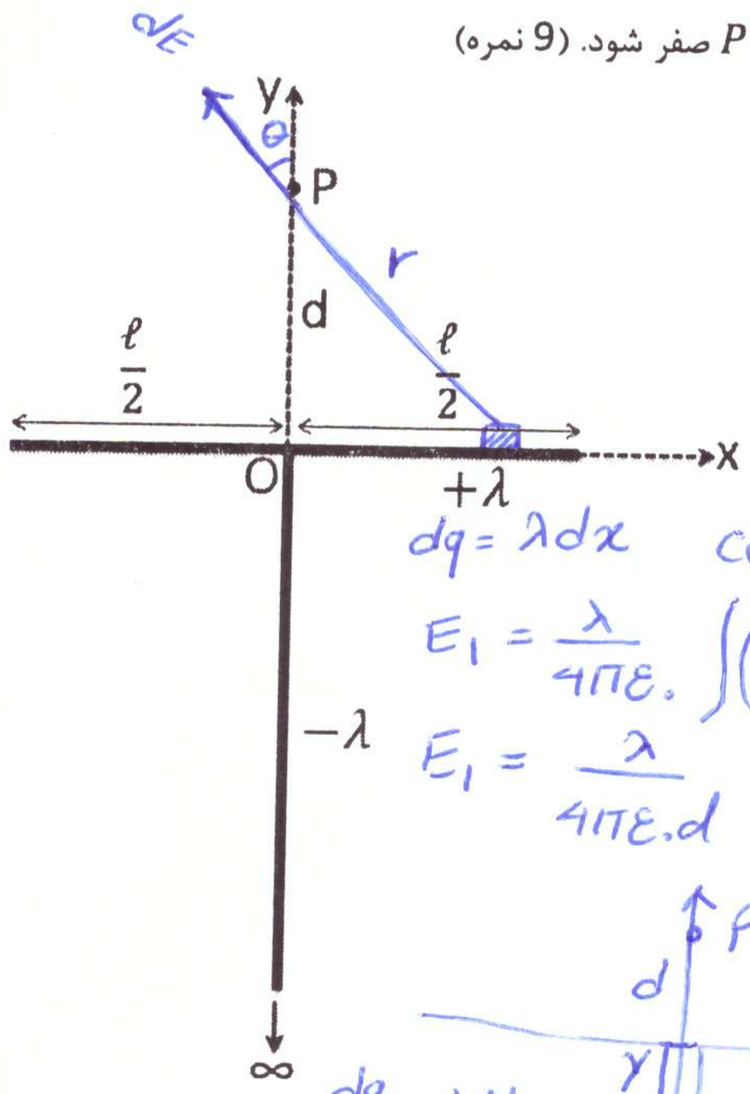
نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی:

شماره صندلی: شماره تالار:

- امتحان شامل 4 سوال است. برگه ها را از هم جدا نکنید. - از قلم قرمز، ماشین حساب و تلفن همراه استفاده نکنید - از مراقبین سوال نپرسید.

---

1) مطابق شکل یک خط بار افقی به طول محدود ℓ و چگالی بار $+\lambda$ ، عمود بر یک خط بار نیمه نامتناهی قائم با چگالی بار $-\lambda$ قرار گرفته است. نقطه P مطابق شکل، روی عمود منصف خط افقی و درامتداد خط قائم قرار گرفته است به طوری که فاصله OP برابر d است. d را بر حسب ℓ چنان به دست آورید که میدان الکتریکی برآیند در نقطه P صفر شود. (9 نمره)



3,5 برای حل در مرحله ی اوّل میدان پاره خط به طول ℓ را محاسبه می کنیم.

$dE_y = dE\cos\theta \rightarrow E_y = \int dE\cos\theta = E_y$

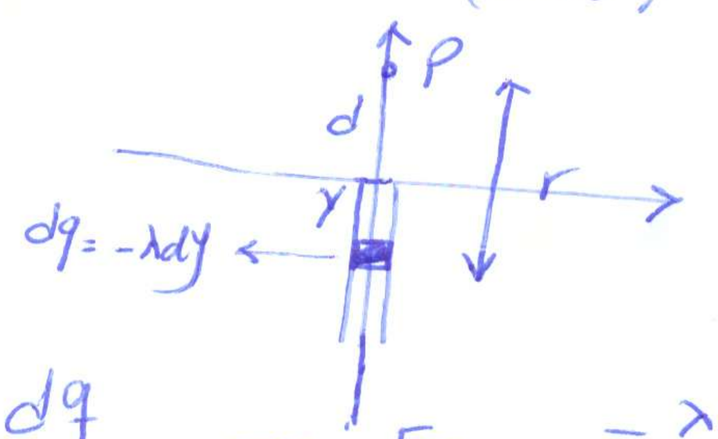
$dE_x = dE\sin\theta \qquad E_x = 0$

$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}\cos\theta$

$dq = \lambda dx \qquad \cos\theta = \frac{d}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{d}$; $x = d\tan\theta \rightarrow dx = \frac{d}{\cos^2\theta}d\theta$

$E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\cos\theta}{d}\right)^2 \frac{d}{\cos^2\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\sin\theta\Big|_{-\theta_0}^{+\theta_0}$

$E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\frac{x}{(x^2+d^2)^{1/2}}\Big|_{-\ell/2}^{+\ell/2} \Rightarrow \vec{E_1} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[\frac{\ell}{\sqrt{(\ell/2)^2+d^2}}\right]\hat{j}$



3,5 در مرحله ی دوم میدان خط نیمه بی نهایت را محاسبه می کنیم:

$dE_2 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dy}{r^2} \qquad E_2 = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{-\infty}\frac{dy}{(d+y)^2} =$

$+\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d+y}\Big|_0^{-\infty} \qquad \vec{E_2} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\hat{j}$

2 شرط این که در نقطه ی P میدان صفر باشد:

$|E_1| = |E_2|$

$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[\frac{\ell}{\sqrt{(\ell/2)^2+d^2}}\right] \Rightarrow \frac{\ell}{\sqrt{(\ell/2)^2+d^2}} = 1$

$\Rightarrow \boxed{d = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell}$

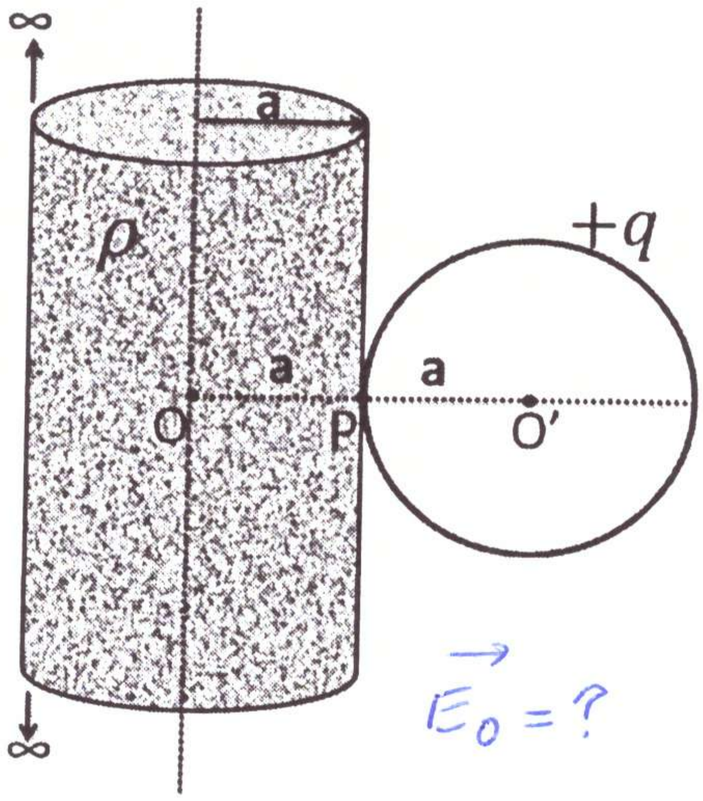
2) بار الکتریکی با چگالی حجمی ثابت $\rho +$ در سرتاسر حجم یک استوانه **نارسانای** توپر به شعاع قاعده a و طول بی نهایت توزیع شده است. مطابق شکل یک پوسته کروی **نارسانای** به شعاع a مماس بر این استوانه قرار گرفته است. بار کل $+q$ نیز به طور یکنواخت روی سطح پوسته کروی توزیع شده است. مطلوب است محاسبه میدان الکتریکی $\vec{E}$

نمره

الف) در نقطه O (واقع بر محور استوانه) → 3

ب) در نقطه O' (واقع در مرکز پوسته کروی) → 3

ج) در نقطه P (نقطه تماس پوسته کروی و استوانه) بر حسب ρ و q و a. (9 نمره) → 3



قانون گاوس

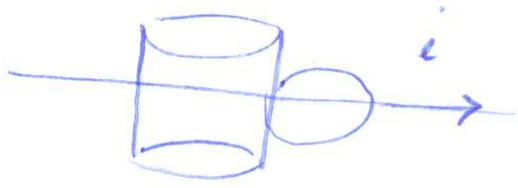
$$\begin{cases} \phi_{\text{خالص}} = \dfrac{q_{in\,\text{خالص}}}{\varepsilon_0} \\ \phi_{\text{خالص}} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} \end{cases}$$

$\vec{E}_O = ?$

الف)

میدان داخل استوانه

$$\begin{cases} \phi_1 = \oint \vec{E}_1 d\vec{A} = E_1 \int dA = E_1 (2\pi r)\ell \\ q_1 = \int dq_1 = \rho \int dV = \rho(\pi r^2)\ell \\ \vec{E}_1 = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r} \rightsquigarrow E_1\Big|_0 = \text{صفر} \end{cases}$$



میدان خارج پوسته

$$\begin{cases} \phi_2 = \oint \vec{E}_2\cdot d\vec{A} = E_2 \int dA = E_2(4\pi r^2) \\ q_2 = \int dq_2 \Rightarrow q_2 = +q \\ \vec{E}_2 = \dfrac{Kq\hat{r}}{r^2} \rightarrow \vec{E}_2\Big|_0 = \dfrac{Kq}{4a^2}(-\hat{i}) \end{cases}$$

$$\vec{E}_O = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Kq}{4a^2}(-\hat{i})$$

$\vec{E}_{O'} = ?$

ب)

میدان خارج استوانه

$$\begin{cases} \phi_1 = \oint \vec{E}_1\cdot d\vec{A} = E_1 \int dA = E_1(2\pi r)\ell \\ q_1 = \int dq_1 = \rho \int dV = \rho(\pi a^2)\ell \\ \vec{E}_1 = \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} \rightarrow \vec{E}_1\Big|_{O'} = \dfrac{\rho a}{4\varepsilon_0}(+\hat{i}) \end{cases}$$

میدان داخل پوسته

$$\begin{cases} q_2 = \text{صفر} \\ \phi_2 = \text{صفر} \end{cases} \longrightarrow E_2(4\pi r^2) = \text{صفر} \quad E_2 = \text{صفر}$$

$$\vec{E}_{O'} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho a}{4\varepsilon_0}\hat{i}$$

$E_P = ?$

ج)

میدان خارج استوانه $\vec{E}_1 = \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} \quad \vec{E}_1\Big|_{r=a} = \dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}(+\hat{i})$

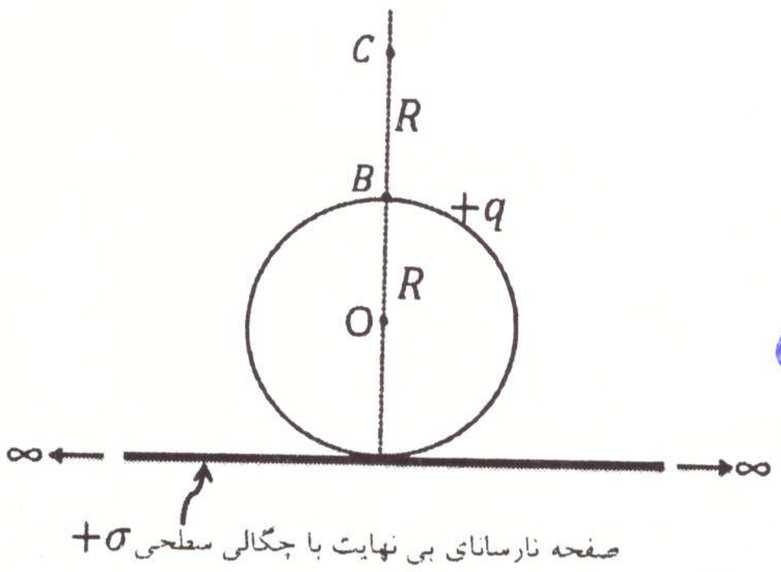
میدان خارج پوسته $\vec{E}_2 = \dfrac{q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{r} \quad \vec{E}_2\Big|_{r=a} = \dfrac{q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}(-\hat{i})$

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{i} + \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}(-\hat{i})$$

3) مطابق شکل زیر، یک پوسته کروی **نارسانا** به شعاع R روی یک صفحه **نارسانای** نازک و با طول و عرض بسیار بزرگ قرار گرفته است. چگالی سطحی بار صفحه نارسانا$+\sigma$ است و کل بار پوسته کروی (که به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است)،$+q$ است.

الف) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه C و B ، یعنی $(V_B - V_C)$ ، را برحسب پارامتر های داده شده، به دست آورید. ← ۴ نمره

ب) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه B و O ، یعنی$(V_O - V_B)$ ، را، برحسب پارامتر های داده شده، به دست آورید (نقاط O و B و C در یک امتداد هستند) .(8 نمره) ← ۱ نمره



الف : برای فاصله B تا C : ابتدا میدان الکتریکی ناشی از

کره و صفحه :

$E_{r>R} = \frac{kq}{r^2}$ ناشی از پوسته کروی

$E_{r>R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ناشی از صفحه نارسانا

$$\rightarrow V_B - V_C = -\int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_B^C E\,dr = \int_B^C \left[\frac{kq}{r^2} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right] dr$$

$$= -\frac{kq}{r}\Big|_B^C + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r\Big|_B^C = kq\left[\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right] + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times R = kq\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right] + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

$$= \frac{kQ}{2R} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$ ۴ نمره

ب : $V_O - V_B = ?$

$E_{r<R} = 0$ ناشی از پوسته کروی

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ناشی از صفحه نارسانا

۱ نمره

$$V_O - V_B = -\int_B^O \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_O^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_O^B E\,dr$$

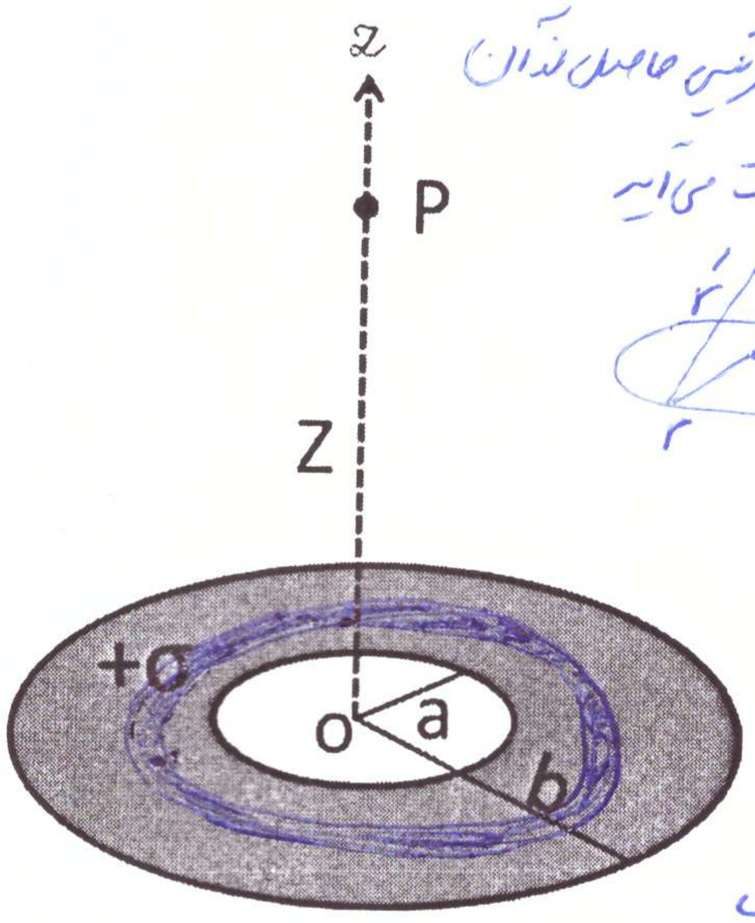
$$= \int_O^B \left(0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r\Big|_O^B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R$$

4) مطابق شکل یک قرص نارسانا به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای بار یکنواخت با چگالی سطحی $+\sigma$ است.

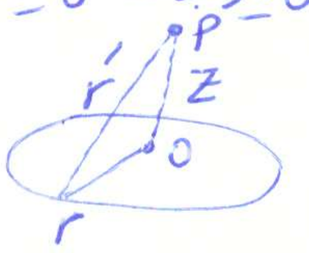
الف) پتانسیل الکتریکی را در نقطه P واقع بر محور قرص و به فاصله Z از نقطه O (مرکز قرص) به دست آورید. → ۵ نمره

ب) با استفاده از نتیجه الف، میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در نقطه P به دست آورید. → ۱ نمره

ج) در صورتی که $b = 2a$ باشد و پروتونی (با بارالکتریکی $+e$ و جرم m_p) را از نقطه O رها کنیم، وقتی پروتون به نقطه P به فاصله $Z = 4a$ می رسد، سرعت آن، بر حسب پارامترهای داده شده، چقدر است؟ (از انرژی پتانسیل گرانشی صرفنظر شود.) (8 نمره) → ۲ نمره



الف) هرگاه یک حلقه به شعاع r را که بار کل آن q است در نظر بگیریم، پتانسیل الکتریکی حاصل از آن در یک نقطه مثل P که به فاصله‌ی Z از مرکز حلقه قرار دارد به صورت ساده‌ی زیر بدست می‌آید



$$dV = K\frac{dq}{r'} = K\frac{dq}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

$$V = \int dV = \int_{\text{کل بار}} K\frac{dq}{\sqrt{r^2+Z^2}} = \frac{K}{\sqrt{r^2+Z^2}}\int dq$$

$$V = K\frac{q}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$ پتانسیل حاصل از یک حلقه با بار q و به شعاع r

اکنون می‌توان از نتیجه‌ی فوق برای بدست آوردن پتانسیل الکتریکی حاصل از یک دیسک باردار استفاده کرد

پتانسیل حاصل از نوار دایره‌ای به شعاع r و پهنای dr

$$dV = K\frac{2\pi r\,dr\,\sigma}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

پتانسیل حاصل از دیسک

$$V = \int_a^b dV = K2\pi\sigma\int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+Z^2}\right]_a^b = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{b^2+Z^2}-\sqrt{a^2+Z^2}\right]$$ رابطه ①

$$E = -\frac{dV}{dZ} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{\sqrt{b^2+Z^2}} - \frac{Z}{\sqrt{a^2+Z^2}}\right]$$ ب)

ج) اگر $b=2a$ باشد رابطه‌ی ① بصورت $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{4a^2+Z^2}-\sqrt{a^2+Z^2}\right]$ نوشته می‌شود لذا

$$V_{O(Z=0)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[2a-a\right] = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \qquad V_{P(Z=4a)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{4a^2+16a^2}-\sqrt{a^2+16a^2}\right]$$

$$V_{P(Z=4a)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[a\sqrt{20}-a\sqrt{17}\right] = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{20}-\sqrt{17}\right]$$

انرژی پتانسیل

$$e(V_O - V_P) = \frac{\sigma a e}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma a e}{2\varepsilon_0}(\sqrt{20}-\sqrt{17}) = \frac{\sigma a e}{2\varepsilon_0}(1-\sqrt{20}+\sqrt{17}) = \frac{1}{2}m_p v_p^2 = T$$

$$v_p = \left(\frac{\sigma a e}{\varepsilon_0 m_p}\left[1-\sqrt{20}+\sqrt{17}\right]\right)^{1/2}$$